

MP BOARD CLASS 12 PAPER 2015

गणित : कक्षा XII

खण्ड 'अ'

1. सही विकल्प चुनकर लिखिए—

5 × 1 = 5

(i) $\frac{1}{(x+3)(x+4)}$ का आंशिक भिन्न रूप है—

- (a) $\frac{1}{(x+3)} + \frac{1}{(x+4)}$, (b) $\frac{1}{(x+3)} - \frac{1}{(x+4)}$,
(c) $\frac{1}{(x+4)} - \frac{1}{(x+3)}$, (d) $\frac{1}{2} \left[\frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+4} \right]$.

(ii) मूल बिन्दु से समतल $3x - 6y + 5z = 12$ पर डाले गये लम्ब की लंबाई होगी—

- (a) $-\frac{\sqrt{70}}{12}$, (b) $-\frac{12}{\sqrt{70}}$, (c) $\frac{12}{\sqrt{70}}$, (d) $\frac{\sqrt{70}}{12}$.

(iii) $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ की दिशा में एकांक सदिश होगा—

- (a) $\frac{1}{\sqrt{3}} (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$, (b) $\sqrt{3} (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$,
(c) $\frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$, (d) $\sqrt{2} (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$.

(iv) $\log(\sin x)$ का x के सापेक्ष अवकलन होगा—

- (a) $\cot x$, (b) $\operatorname{cosec} x$, (c) $\tan x$, (d) $\sec x$.

(v) न्यूटन-रैफसन विधि से किसी संख्या y का वर्गमूल ज्ञात करने का सूत्र है—

- (a) $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left[x_n + \frac{y}{x_n} \right]$, (b) $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left[x_0 + \frac{y}{x_0} \right]$,
(c) $x_{n+1} = \frac{1}{3} \left[2x_n + \frac{y}{x_n^2} \right]$, (d) $x_{n+1} = \frac{1}{3} \left[2x_0 + \frac{y}{x_0^2} \right]$.

उत्तर—(i) (b), (ii) (c), (iii) (a), (iv) (a), (v) (a).

2. एक शब्द/वाक्य में उत्तर दीजिए—

5 × 1 = 5

(i) बिन्दु (2, 1, 3) से गुजरने वाली तथा दिक्-अनुपात (1, 3, 2) वाली सरल रेखा का समीकरण लिखिए।

(ii) यदि $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ किसी $\triangle ABC$ के शीर्षों के स्थिति सदिश हों, तो $\triangle ABC$ के क्षेत्रफल का सूत्र लिखिए।

(iii) $\int \frac{dx}{ax+1}$ का मान लिखिए।

(iv) धनात्मक सह-सम्बन्ध को परिभाषित कीजिए।

(v) न्यूटन-रैफसन विधि से $\sqrt{12}$ का मान प्रथम पुनरावृत्ति के पश्चात् क्या होगा ?

उत्तर—(i) $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{2}$, (ii) $\frac{1}{2} (\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a})$,

(iii) $\frac{1}{a} \log(ax+1)$ (iv) जब एक चर के मानों में वृद्धि या कमी होने पर दूसरे चर के मानों में भी क्रमशः वृद्धि या कमी हो, अर्थात् दोनों चरों में परिवर्तन एक ही दिशा में हो, तो इस प्रकार के सह-सम्बन्ध को धनात्मक सह-सम्बन्ध कहते हैं, (v) 3.5.

3. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए—

5 × 1 = 5

(i) $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \dots\dots\dots$ होगा।

(ii) गोले $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 6x - 12y + 6z + 2 = 0$ का केन्द्र $\dots\dots\dots$ है।

(iii) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ समतलीय हों, तो $[\vec{a} \vec{b} \vec{c}] = \dots\dots\dots$ होगा।

- (iv) समाश्रयण गुणांकों का समान्तर माध्य सदैव सह-सम्बन्ध से होता है।
 (v) आंकिक विधियाँ सम्बन्धी समलम्ब चतुर्भुजीय नियम के अनुसार सूत्र है।

उत्तर—(i) $\frac{\pi}{2}$, (ii) (1, 2, -1) (iii) 0 (शून्य). (iv) बड़ा,
 (v) $\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2} [(y_0 + y_n) + 2(y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1})]$; जहाँ $h = \frac{b-a}{n}$

4. सत्य/असत्य लिखिए—

5 × 1 = 5

- (i) बिन्दु P (x, y, z) की X-Y समतल से दूरी $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ होगी।
 (ii) e^x का $\sqrt{x}$ के सापेक्ष अवकल गुणांक $\sqrt{x} \cdot e^x$ है।
 (iii) $f(x) = 2x^3 - 21x^2 + 36x - 30$, $x = 1$ पर महत्तम है।
 (iv) न्यूटन-रैफसन विधि से समीकरण $f(x) = 0$ का सन्निकट मूल x_n हो, तो

$$x_n = x_{n+1} - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$
 होगा।
 (v) न्यूटन-रैफसन विधि से 10 का घनमूल प्रथम पुनरावृत्ति पश्चात् 2.167 होगा।

उत्तर—(i) असत्य, (ii) असत्य, (iii) सत्य, (iv) असत्य, (v) सत्य।

5. सही जोड़ी बनाइए—

5 × 1 = 5

- | ‘अ’ | ‘ब’ |
|--|---|
| (a) $\int \frac{dx}{x^2 + a^2}$ | (i) $\log [x - \sqrt{x^2 - a^2}]$ |
| (b) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ | (ii) $\frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2} a^2 \sin^{-1} \frac{x}{a}$ |
| (c) $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$ | (iii) $\frac{1}{a} \tan^{-1} \left(\frac{x}{a} \right)$ |
| (d) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$ | (iv) $a \cdot \tan^{-1} x$ |
| (e) $\int \sqrt{a^2 + x^2} dx$ | (v) $\sin^{-1} \left(\frac{x}{a} \right)$ |
| | (vi) $\frac{x}{2} \sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2} \log [x + \sqrt{x^2 + a^2}]$ |
| | (vii) $\log [x + \sqrt{x^2 - a^2}]$ |

उत्तर—(a) → (iii), (b) → (v), (c) → (ii), (d) → (vii), (e) → (vi).

खण्ड ‘ब’

6. सिद्ध कीजिए कि : $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = 0$.

2 अथवा

यदि $\vec{OP} = \hat{i} + 4\hat{j} - 3\hat{k}$ और $\vec{OQ} = 2\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$ हो, तो सदिश $\vec{PQ}$ का मापांक ज्ञात कीजिए।

7. सिद्ध करो कि सदिश $2\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$ और $-2\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ परस्पर लम्ब हैं।

2 अथवा

यदि $\vec{a} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$ और $\vec{b} = 3\hat{i} + 2\hat{j}$ हो, तो $\vec{a} \times \vec{b}$ ज्ञात कीजिए।

8. उस गोले का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका केन्द्र (2, -3, 4) तथा त्रिज्या 5 है।

2 अथवा

बिन्दु (2, -1, 3) की समतल $\vec{r} \cdot (3\hat{i} + 2\hat{j} - 6\hat{k}) + 15 = 0$ से दूरी ज्ञात करो।

9. $\int \frac{dx}{1 + \cos 2x}$ का मान ज्ञात कीजिए।

2 अथवा

$\int \frac{1}{1 - 4x} dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

10. $\int_0^{\pi/4} \sin 2x \, dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 2 अथवा
 $\int \frac{\sec x}{(\sec x - \tan x)} \, dx$ का मान ज्ञात कीजिए।
11. निम्नांकित भिन्न को आंशिक भिन्नो में विभक्त कीजिए : $\frac{16}{(x+2)(x^2-4)}$ 4 अथवा
 निम्नांकित भिन्न को आंशिक भिन्नो में विभक्त कीजिए : $\frac{2x+1}{(x-1)(x^2+1)}$
12. सिद्ध कीजिए कि :
 $\sin^{-1} x + \sin^{-1} y = \sin^{-1} [x \sqrt{1-y^2} + y \sqrt{1-x^2}]$ 4 अथवा
 यदि $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y + \tan^{-1} z = \frac{\pi}{2}$, हो, तो सिद्ध कीजिए कि :
 $xy + yz + zx = 1$.
13. प्रथम सिद्धान्त से $\sin x$ का अवकल गुणांक ज्ञात कीजिए। 4 अथवा
 यदि $y = \log(\log \sin x)$ हो, तो $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कीजिए।
14. $\tan^{-1} \left[\frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} \right]$ का x के सापेक्ष अवकलन कीजिए। 4 अथवा
 $\frac{e^{2x} + e^{-2x}}{e^{2x} - e^{-2x}}$ का x के सापेक्ष अवकल गुणांक ज्ञात कीजिए।
15. यदि एक घन की कोर 5 सेमी प्रति सेकण्ड की दर से बढ़ रही हो, तो घन का आयतन किस दर से बढ़ रहा है, जब उसके कोर की लम्बाई 8 सेमी है ? 4 अथवा
 सिद्ध कीजिए कि : $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 100$, R पर वृद्धिमान है।
16. दो चर राशियों x और y का सह सम्बन्ध गुणांक r है, तो सिद्ध कीजिए कि :
 $r = \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_{x-y}^2}{2\sigma_x \cdot \sigma_y}$ जहाँ σ_x^2, σ_y^2 और σ_{x-y}^2 क्रमशः x, y और $x - y$ के प्रसरण गुणांक हैं। 4 अथवा
 यदि $n = 10, \Sigma x = 50, \Sigma y = -30, \Sigma x^2 = 290, \Sigma y^2 = 300, \Sigma xy = -115$ हो, तो सह-सम्बन्ध गुणांक ज्ञात कीजिए।
17. यदि दो समाश्रयण रेखाओं के बीच का कोण θ है और समाश्रयण गुणांक $b_{yx} = 1.6$ तथा $b_{xy} = 0.4$ है, तो $\tan \theta$ का मान ज्ञात कीजिए। 4 अथवा
 सिद्ध करो कि सह-सम्बन्ध गुणांक समाश्रयण गुणांकों का गुणोत्तर माध्य होता है।
18. यदि किसी सरल रेखा की दिक्-कोज्याएँ $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ हो, तो सिद्ध करो कि :
 $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -1$. 5 अथवा
 गोले का समीकरण $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 8x + 12y - 16z + 8 = 0$ है। उसका केन्द्र तथा त्रिज्या ज्ञात कीजिए।
19. सिद्ध करो कि : $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 1}{x} \right) = 1$. 5 अथवा
 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos 2x}{x} \right)$ का मान ज्ञात कीजिए।
20. वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 5 अथवा
 सिद्ध कीजिए कि : $\int_0^1 \tan^{-1} x \, dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \log 2$.

21. अवकल समीकरण, $(1 + x)y \, dx + (1 - y)x \, dy = 0$ को हल कीजिए। 5 अथवा
अवकल समीकरण, $(x^2 + xy) \, dy = (x^2 + y^2) \, dx$ को हल कीजिए।
22. प्रायिकता का योगशील प्रमेय लिखिए और सिद्ध कीजिए। 5 अथवा
एक थैली में 8 काली और 5 सफेद गेंदें हैं। उनमें से 2 गेंदें बाहर निकाली जाती हैं।
प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि दोनों गेंदें सफेद हों।
23. सिद्ध कीजिए कि रेखाएँ $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$ व $\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{5}$
समतलीय हैं तथा रेखाओं के प्रतिच्छेद बिन्दु ज्ञात कीजिए। 6 अथवा
उस गोले का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ तथा $(0, 0, 1)$ से होकर गुजरता है तथा जिसका केन्द्र समतल $3x - y + z = 2$ पर स्थित हो।
24. सदिश विधि से सिद्ध कीजिए कि :
 $\cos(A - B) = \cos A \cdot \cos B + \sin A \cdot \sin B$ 6 अथवा
रेखाओं $\vec{r} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k} + t(2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k})$ और
 $\vec{r} = 2\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k} + s(3\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k})$ के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए।